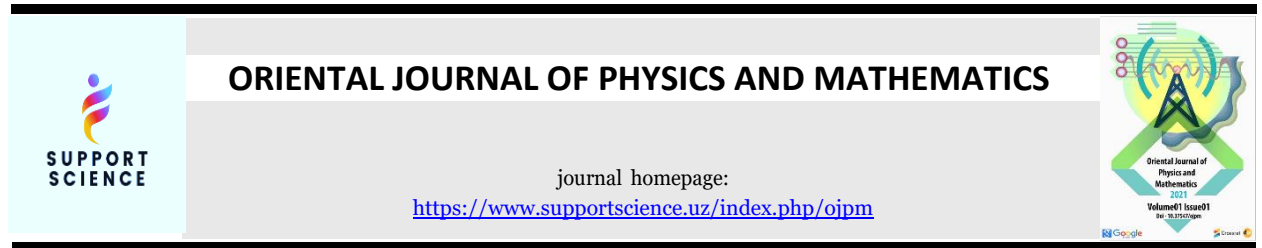


**Oriental Journal of Physics and Mathematics****MATHEMATICAL MODELING OF THE BIOLOGICAL POPULATION PROCESS WITH CONVECTIVE TRANSPORT****M. Aripov**

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek  
Tashkent, Uzbekistan  
E-mail: [mirsaidaripov@mail.ru](mailto:mirsaidaripov@mail.ru)

**M. Sayfullaeva**

Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khorazmi  
Tashkent, Uzbekistan  
E-mail: [maftuha87@mail.ru](mailto:maftuha87@mail.ru)

**F. Kabiljonova**

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek  
Tashkent, Uzbekistan  
E-mail: [kabiljanovafiruza@mail.ru](mailto:kabiljanovafiruza@mail.ru)

**ABOUT ARTICLE**

**Key words:** biological population, model, front, parabolic equation, effects.

**Received:** 24.05.24

**Accepted:** 26.05.24

**Published:** 28.05.24

**Abstract:** In this article we will discuss one problem of a nonlinear biological population, with double nonlinearity; an exact analytical solution has been found for it, the analysis of which makes it possible to identify a number of characteristic features of thermal processes in nonlinear media. The following nonlinear effects were established: the inertial effect of the finite speed of population spread, spatial localization.

**KONVEKTIV TASHISH BILAN BIOLOGIK POPULYATSIYA JARAYONINI MATEMATIK MODELLASHTIRISH****M. Aripov**

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti  
Toshkent, O'zbekiston  
E-mail: [mirsaidaripov@mail.ru](mailto:mirsaidaripov@mail.ru)

**M. Sayfullaeva**

Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti  
Toshkent, O'zbekiston  
E-mail: [maftuha87@mail.ru](mailto:maftuha87@mail.ru)

**F. Qobiljonova**

*Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti*

*Toshkent, O'zbekiston*

*E-mail: [kabiljanovafiruza@mail.ru](mailto:kabiljanovafiruza@mail.ru)*

---

### MAQOLA HAQIDA

---

**Kalit so'zlar:** biologik populyatsiya, model, front, parabolik tenglama, effektlar.

**Annotatsiya:** Ushbu maqolada biz chiziqli bo'lmagan biologik populyatsiyaning ikkita noxiziqli muammosini muhokama qilamiz; uning uchun aniq analitik yechim topildi, uning tahlili chiziqli bo'lmagan muhitda issiqlik jarayonlarining bir qator xarakterli xususiyatlarini aniqlash imkonini beradi. Quyidagi noxiziqli effektlar o'rnatildi: aholi tarqalishining cheklangan tezligining inertial ta'siri, fazoviy lokalizatsiya.

---

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА БИОЛОГИЧЕСКОЙ ПОПУЛЯЦИИ С КОНВЕКТИВНЫМ ПЕРЕНОСОМ

**М. Арипов**

*Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбек*

*Ташкент, Узбекистан*

*E-mail: [mirsaidaripov@mail.ru](mailto:mirsaidaripov@mail.ru)*

**М. Сайфуллаева**

*Ташкентский университет информационных технологий им. Мухаммада ал-Хоразмий*

*Ташкент, Узбекистан*

*E-mail: [maftuha87@mail.ru](mailto:maftuha87@mail.ru)*

**Ф. Кабилжанова**

*Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбек*

*Ташкент, Узбекистан*

*E-mail: [kabiljanovafiruza@mail.ru](mailto:kabiljanovafiruza@mail.ru)*

---

### О СТАТЬЕ

---

**Ключевые слова:** биологическая популяция, модель, фронт, параболическое уравнение, эффекты.

**Аннотация:** В этой статье мы обсудим одну проблему нелинейной биологической популяции, с двойной нелинейностью; для него найдено точное аналитическое решение, анализ которого позволяет выявить ряд характерных особенностей термических процессов в нелинейных средах. Были установлены следующие нелинейные эффекты: инерционный эффект конечной скорости распространения популяции, пространственная локализация.

---

## ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующую задачу о действии мгновенного концентрированного роста популяции в несжимаемой нелинейной среде с коэффициентом двойной нелинейности биологической популяции и его градиентом при наличии объемного вымирания, мощность которого зависит от времени и конвективного переноса, скорость которого зависит от времени. Такой нестационарный процесс биологической популяции описывается следующей задачей Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla(u^{m-1} |\nabla u^k|^{p-2} \nabla u) + \operatorname{div}(v(t)u) + c(t)u - b(t)u^q, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (t > 0, x \in R^N) \quad (2)$$

Здесь  $k, m \geq 1, p \geq 2$  – заданные числовые параметры,  $u = u(t, x) \geq 0$  – плотность популяции в момент  $t > 0$  в точке  $x \in R^N$ ,  $v(t)$  – скорость конвективного переноса (миграции),  $c(t)$  – коэффициент линейного роста популяции, и  $b(t)u^q$  – вымирание популяции.

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Рассматриваемая математическая модель также описывает изменение одной или нескольких свойств изучаемой биоэкологической системы во времени и области. В простейшем случае, она представляется в виде зависимости  $u = u(t, x)$ , где  $u$  – вектор отслеживаемых характеристик (одной из которых может выступать плотность популяции),  $x$  – вектор пространственной системы координат,  $t$  – время. Смысл изучаемых характеристик могут быть различными. Так, плотность популяции отдельных единичных численности популяции может принимать только точные значения.

Уравнения, описывающие процессы биологической популяции, также описывают процессы переноса энергии в высокотемпературных средах. При исследовании процессов переноса энергии в высокотемпературных средах следует учитывать ряд их особых свойств. Например, зависимость теплоемкости и коэффициента теплопроводности от температуры, необходимо учитывать вклад объемного излучения в энергетический баланс, процессы экзо-и эндотермической ионизации, протекание химических реакций, горение и др. Наряду с этим можно также учитывать конвективный теплообмен и его влияние на эволюцию исследуемого процесса. Интенсивное развитие теории нелинейного переноса было стимулировано исследованиями в области физики плазмы [1]. В работах [2], [3] исследованы свойства решений, следующих вырождающихся и сингулярных параболических уравнений в не дивергентной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^m \nabla (|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

Затем, получая автомодельное решение, показали асимптотическое поведение решений для большого времени. Исследованы случаи медленной и быстрой диффузии, и приведены результаты численных экспериментов задачи Коши. Получены фундаментальные результаты и открыт ряд нелинейных эффектов, определяющих свойства инерции и локализацию тепловых процессов [4], [5]. Различные свойства решения задачи Коши для (1),(2) приведены в [6]-[8]. В частности, в работе [9] анализируется случай переменной диффузии с миграционными потоками, зависящими от неравномерности распределения популяций и ресурсов. На основе метода прямых исследовано влияние миграции на формирование распределений популяций, изучены сценарии локального вытеснения и сосуществования видов. Zhou и др. доказали условия существования решений [10]. Авторы работы [11]-[12] для уравнения (1) изучали не существование в целом решений для класса нелинейных вырождающихся параболических уравнений недивергентного вида. Они изучили свойства решений задачи и получили новые критические показатели.

Изучая нелинейные инерционные эффекты в нестационарном процессе переноса энергии в несжимаемой среде, коэффициент теплопроводности которой зависит от температуры и градиента температуры степенным образом, найден ряд точных решений задач для квазилинейных параболических уравнений, описывающих эволюцию тепловых структур в такой модельной среде при наличии в ней объемных источников. В частности, в работе [13] эти эффекты изучаются при рассмотрении процесса теплопереноса в несжимаемой среде, коэффициент теплопроводности которой зависит от температуры и градиента температуры степенным образом:

$$k = k(u, \text{grad } u) = k_0 u^\sigma |\text{grad } u|^\alpha, \quad k_0 = \text{const} > 0.$$

Такая обобщенная степенная модель нелинейной среды может использоваться не только в теории теплопроводности, но и для описания различных по физической природе процессов переноса диффузионного типа, фильтрации жидкости и газа.

Мартинсон К.Б. [14] рассмотрев уравнение

$$u_t = \text{div}(u^\sigma |\text{grad } u|^\alpha \text{grad } u) + f(u, Du, t, x), \quad (x, t) \in R^N \times (0, +\infty), \quad N = 1, 2, 3.$$

в случае  $f = f(u, t) = -\Pi t^\beta u^\nu$ , где  $\Pi > 0$  - параметр поглощения и  $\beta \geq 0, 0 < \nu < 1$  при  $\nu = (1 - \sigma)(1 + \alpha)^{-1}, 0 < \sigma < 1, \nu < 1$ , т.е. для частного случая задачи (1)-(2), когда  $k=1, v(t)=0, c(t)=0$  получил следующее точное решение

$$u(r, t) = a(t) [\varphi(t) - r^{(\alpha+2)/(\alpha+1)}]_+^{(\alpha+1)/(\alpha+\sigma)}, \quad r = \left( \sum_1^N x_i^2 \right)^{1/2}$$

где использовано обозначение

$$[\xi]_+ = \begin{cases} \xi & \text{при } \xi > 0, \\ 0 & \text{при } \xi \leq 0 \end{cases},$$

которое означает конечную скорость распространения возмущения в рассматриваемой нелинейной среде. Положение фронта, отделяющего нагретую область от области, где  $u=0$ , определяется в любой момент времени соотношением

$$r = r_0(t) = [\varphi(t)]^{(\alpha+1)/(\alpha+2)}$$

$$a(t) = a_0 t^{-1/(\alpha+\sigma)}, \quad a_0 = \left\{ \left( \frac{\alpha+2}{\alpha+\sigma} \right)^{\alpha+1} [n(\alpha+\sigma) + \alpha+2] \right\}^{-1/(\alpha+\sigma)}$$

$$\varphi(t) = Ct^{\delta_1} - Pt^{\delta_2}$$

Здесь  $P = \Pi \left( \frac{\alpha+2}{\delta_1(a+1)} \right)^{(\alpha+2)/(\alpha+1)} \left( \frac{\delta_2}{\delta_1} - 1 \right)^{-1}$ ,  $\delta_2 = (\beta+1) + (\alpha+1)^{-1}$ ,  $\delta_2 > \delta_1$

а значение  $C > 0$  - определяется из интегрального условия

$$a_0 C^{1/(\alpha+\sigma)\delta_1} M(N) \int_0^1 \xi^{N-1} [1 - \xi^{(\alpha+2)/(\alpha+1)}]^{(\alpha+1)/(\alpha+\sigma)} d\xi = Q,$$

где  $M(N) = \begin{cases} 2 & \text{при } N = 1, \\ 2\pi & \text{при } N = 2, \\ 4\pi & \text{при } N = 3. \end{cases}$

Поэтому  $C = Q^{(\alpha+\sigma)\delta_1} \left\{ a_0 M(N) \frac{\alpha+1}{a+\sigma} B \left[ \frac{N(\alpha+1)}{a+2}, 1 + \frac{\alpha+1}{a+\sigma} \right] \right\}^{-(\alpha+\sigma)\delta_1}$ ,

где  $B$  – бета функция Эйлера.

Анализируя это решение, он установил следующие свойства решения: инерционный эффект конечной скорости распространения тепловых возмущений, пространственную локализацию тепла.

Теперь рассмотрим свойства математической модели (1)-(2) и путем построения точного решения установим следующие свойства решения: инерционный эффект конечной скорости распространения популяции, пространственную локализацию. Для того чтобы показать это, рассмотрим класс радиально-симметричных решений уравнения (1), полученных следующим образом

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= \bar{u}(t)w(\tau(t), |\xi| = r), \quad \bar{u}(t) = \exp\left(\int_0^t c(y)dy\right), \\
 \xi &= \int_0^t v(y)dy - x, \quad |\xi| = \left(\sum_1^N \left(\int_0^t v(y)dy\right) - x_i\right)^{1/2}, \quad x \in R^N, \\
 \tau(t) &= \int_0^t [\bar{u}(y)]^{k(p-2)+m-1} dy
 \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда после нетрудных вычислений и переходя к новой переменной по времени уравнение (1) приобретает следующий вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w}{\partial \tau} &= \nabla(w^{m-1} |\nabla w_\xi^k|^{p-2} \nabla_\xi w) - b_1(\tau)w^q, \quad (t > 0, x \in R^N), \\
 u(0, x) &= w(0, x) = u_0(x) \geq 0,
 \end{aligned} \tag{4}$$

где  $b_1(\tau) = g^{-1}(\tau)$ ,  $g(t) = b(t)[\bar{u}(t)]^{-(k(p-2)+m)}$

С учетом результата работы [13] решение задачи (3) будем искать в виде финитной, по пространственной переменной, функции

$$\begin{aligned}
 w(\tau, r) &= a_1(\tau)(f_1(\tau) - r^\gamma)_+^{\gamma_1}, \\
 \gamma &= p / (p - 1), \quad \gamma_1 = (p - 1) / (k(p - 2) + m - 1), \quad k(p - 2) + m - 1 \neq 0
 \end{aligned} \tag{5}$$

где  $a_1(\tau)$  и  $f_1(\tau)$  - функции, подлежащие определению, и через  $(n)_+$  обозначено  $(n)_+ = \max(0, n)$ .

Решение (5) учитывает конечную скорость распространения возмущений в рассматриваемой нелинейной среде и описывает распределение популяции, занимающей в пространстве шаровую область конечных размеров. Положение фронта, отделяющего нагретую область от области, где  $w = 0$ , определяется в любой момент времени соотношением  $r = r_0(t) = [f(\tau)]^{(p-1)/p}$ .

Вычисляя производные функции  $w(t, r)$  мы имеем

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{da_1}{d\tau} (f_1(\tau) - r^\gamma)^{\gamma_1} + \gamma_1 a_1(\tau) \frac{df_1}{d\tau} (f_1(\tau) - r^\gamma)^{\gamma_1-1} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 (r^{N-1} w^{m-1} \left| \frac{\partial w^k}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial w}{\partial r}) &= -(\gamma k \gamma_1)^{p-2} \gamma \gamma_1 a_1^{(p-2)k+m} r^N (f_1(\tau) - r^\gamma)^{(k\gamma_1-1)(p-2)+(m-1)\gamma_1+\gamma_1-1} = \\
 &= -(\gamma k \gamma_1)^{p-2} \gamma \gamma_1 a_1^{(p-2)k+m} r^N (f_1(\tau) - r^\gamma)^{(k(p-2)+m)\gamma_1-p+1}
 \end{aligned}$$

Если мы выберем в (6)  $\gamma_1$  как

$$(k(p-2) + m)\gamma_1 - (p-1) = \gamma_1, \text{ т.е. } \gamma_1 = \frac{(p-1)}{(k(p-2) + m-1)}.$$

$$r^{1-N} \frac{\partial}{\partial r} (r^{N-1} w^{m-1} \left| \frac{\partial w^k}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial w}{\partial r}) = -(k\gamma\gamma_1)^{p-2} \gamma\gamma_1 N a_1^{k(p-2)+m} (f_1(\tau) - r^\gamma)^{\gamma_1} -$$

$$-[(k\gamma\gamma_1)^{p-2} \gamma\gamma_1 a_1^{k(p-2)+m-1}] (k(p-2) + m)\gamma_1 - (p-1) r^\gamma (f_1(\tau) - r^\gamma)^{\gamma_1-1}$$

Вычисляя

$$r^{1-N} \frac{\partial}{\partial r} (r^{N-1} w^{m-1} \left| \frac{\partial w^k}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial w}{\partial r}) = -(k\gamma\gamma_1)^{p-2} \gamma\gamma_1 N a_1^{k(p-2)+m} (f_1(\tau) - r^\gamma)^{\gamma_1} +$$

$$+ [(k\gamma\gamma_1)^{p-2} \gamma\gamma_1 (k(p-2) + m)\gamma_1 - (p-1) a_1^{k(p-2)+m-1}] r^\gamma [f_1(\tau) - r^\gamma]^{\gamma_1-1}$$
(7)

выражение (7) может быть переписано следующим образом: поэтому

$$r^{1-N} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{N-1} w^{m-1} \left| \frac{\partial w^k}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) - b_1(\tau) w^q = -(k\gamma\gamma_1)^{p-2} \gamma\gamma_1 N a_1^{k(p-2)+m} (f_1(\tau) - r^\gamma)^{\gamma_1} +$$
(8)

$$+ [((k\gamma\gamma_1)^{p-2} \gamma\gamma_1 (k(p-2) + m)\gamma_1 - (p-1)) a_1^{k(p-2)+m-1} r^\gamma - b_1(\tau) a_1^q] [(f_1(\tau) - r^\gamma)^{\gamma_1-1}]$$

если  $\gamma_1 q = \gamma_1 - 1$

Затем, подставляя вычисленные выражения в задачу (4), получим следующее:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{da_1}{d\tau} (f_1(\tau) - r^\gamma)^{\gamma_1} + \gamma_1 a_1(\tau) \frac{df_1}{d\tau} (f_1(\tau) - r^\gamma)^{\gamma_1-1} =$$

$$= -(k\gamma\gamma_1)^{p-2} \gamma\gamma_1 N a_1^{k(p-2)+m} (f_1(\tau) - r^\gamma)^{\gamma_1} + [(k\gamma\gamma_1)^{p-2} \gamma\gamma_1 a_1^{k(p-2)+m-1} r^\gamma -$$

$$- b_1(\tau) a_1^q] [(f_1(\tau) - r^\gamma)^{\gamma_1-1}]$$

Отсюда имеем

$$\left[ \frac{da_1}{d\tau} + (k\gamma\gamma_1)^{p-2} (\gamma\gamma_1 + N) a_1^{k(p-2)+m} \right] (f_1(\tau) - r^\gamma)^{\gamma_1} + [\gamma\gamma_1 a_1(\tau) \frac{df_1}{d\tau} -$$

$$- [(k\gamma\gamma_1)^{p-2} \gamma\gamma_1 a_1^{k(p-2)+m-1}] r^\gamma - b_1(\tau) a_1^q] [(f_1(\tau) - r^\gamma)^{\gamma_1-1}] = 0$$
(9)

Теперь, чтобы определить функции  $a_1(\tau)$  и  $f_1(\tau)$  получим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\gamma\gamma_1 a_1(\tau) \frac{df_1}{d\tau} - b_1(\tau) a_1^q = (\gamma\gamma_1)^p a_1^{k(p-2)+m} f_1(\tau)$$

$$\frac{da_1}{d\tau} + (k\gamma\gamma_1)^{p-2} [(\gamma\gamma_1 + N)] a_1^{k(p-2)+m} = 0, \gamma\gamma_1 = \frac{p}{k(p-2) + m - 1}$$

$$\gamma\gamma_1 a_1(\tau) \frac{df_1}{dt} - (\gamma\gamma_1)^p a_1^{k(p-2)+m} f_1(\tau) = b_1(\tau) a_1^q \tag{10}$$

Первое уравнение (10) имеет следующее общее решение

$$\begin{aligned} a_1(\tau) &= [c + 1 - (k(p-2) + m)(\gamma\gamma_1)^{p-1} [(\gamma\gamma_1 + N)\tau]^{-\frac{1}{k(p-2)+m-1}} = \\ &= [c + (\frac{P}{k(p-2) + m})^{p-1} (p + (k(p-2) + n + m)N\tau)^{-\frac{1}{k(p-2)+m}} \end{aligned} \tag{11}$$

где  $c$  - константа интегрирования.

Для того, чтобы интегрировать второе уравнение системы (10), перепишем его следующим образом

$$\frac{df_1}{d\tau} - b_2(\tau) f_1(\tau) = b_3(\tau) \tag{12}$$

Тогда, принимая во внимание (9) из (10) мы имеем

$$b_2(\tau) = [c + (\frac{P}{k(p-2) + m - 1})^{p-1} (p + (k(p-2) + m - 1)N\tau)^{-1} ,$$

$$b_3(\tau) = b_1(\tau)[a_1(\tau)]^{q-1}$$

$$b_2(\tau) = [(\frac{kp}{k(p-2) + m})^{p-2} (p + (k(p-2) + m - 1)N\tau)^{-1}$$

Следовательно, решение стремящиеся к  $\infty$  при  $\tau \rightarrow 0$  имеет вид

$$a_1(\tau) = [(\frac{kp}{k(p-2) + m})^{p-2} (p + (k(p-2) + m - 1)N)]\tau^{-1/(k(p-2)+m-1)}$$

Уравнение (12) является линейным уравнением первого порядка. Она интегрируема.

Его общее решение имеет вид:

$$\begin{aligned} f_1(\tau) &= [c + (\frac{P}{k(p-2) + m})^{p-2} (p + (k(p-2) + m)N\tau)]^{\frac{(\frac{P}{k(p-2)+m})^{p-1}(p+(k(p-2)+m)N)}{k(p-2)+m}} [f_0 + \\ &+ \int_0^\tau b_3(y) \exp(\int_0^y b_2(x) dx) dy] \end{aligned} \tag{13}$$

При  $c=0$  имеем



$$f_1(\tau) = \left[ \left( \frac{P}{k(p-2)+m} \right)^{p-2} (p + (k(p-2)+m)N\tau) \right]^{\frac{P}{k(p-2)+m} p^{-1} (p+(k(p-2)+m)N)} [f_0 +$$

$$+ \int_0^\tau b_3(y) \exp\left(\int_0^y b_2(x) dx\right) dy]$$

$$\sum_1^N \left( \int_0^t v(y) dy - x_i \right)^{1/2} = [f_1(\tau)]^{(p-1)/p}$$

$$\int_0^\tau v(y) dy < \infty, f_1(\tau) < \infty, \forall \tau > 0$$

Таким образом, окончательно решение искомой задачи о влиянии мгновенного сосредоточенного роста популяции в нелинейной среде с вымиранием найдено в виде (5), где функции  $a_1(\tau)$  и  $f_1(\tau)$  определены выражениями (11) и (13). Найдено точное решение задачи биологической популяции с учетом конвективного переноса с переменной скоростью и выявлено его влияние на эволюцию процесса популяции. Найденное решение пригодно и для процессов теплопередачи в нелинейной среде с конвективным переносом. Используя это решение, проанализируем характер движения фронта распространения популяции и его особенности.

**Теорема 1.** Пусть в задаче (4)  $p - 1 > 0, k(p - 2) + m - 1 > 0$

$$q = \frac{p - [k(p - 2) + m - 1]}{p - 1}, u_0(x) \leq z(0, x), x \in R^N.$$

Тогда для решения задачи (1)-(2) в области  $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in R^N\}$  имеет место оценка

$$u(t, x) \leq z(\tau, r)$$

и имеет место явление конечной скорости распространения популяции.

Здесь

$$z(\tau, r) = a_1(\tau)(f_1(\tau) - r^\gamma)_+^{\gamma_1},$$

$$\gamma = p / (p - 1), \gamma_1 = (p - 1) / (k(p - 2) + m - 1), (k(p - 2) + m - 1) \neq 0$$

$n_+ = \max(0, n)$ , а функции  $a_1(\tau), f_1(\tau)$  - определены выше.

**Теорема 2.** Если выполнены следующие условия в задаче (4)

$$p - 1 > 0, k(p - 2) + m - 1 > 0, q = \frac{p - [k(p - 2) + m - 1]}{p - 1},,$$

$$u_0(x) \leq w(0, \xi), \xi \in R_+, 0 < f(t) < \infty, t > 0,$$

тогда для задачи (4) уместна следующая оценка в области  $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in R^N\}$

$$u(t, x) \leq w(t, \xi).$$

и имеет место явление пространственной локализации решения, где

$$w(t, \xi) = a_1(\tau)(f_1(\tau) - \xi^\gamma)_+^{\gamma_1}, \quad \gamma = p / (p - 1), \quad \gamma_1 = (p - 1) / (k(p - 2) + n + m - 1)$$

здесь функции  $a_1(\tau)$ ,  $f_1(\tau)$  - определены выше.

**Случай быстрой диффузии:**  $k(p - 2) + m - 1 < 0$

**Теорема 3.** Пусть в задаче (1)-(2)

$$q = \frac{p - [k(p - 2) + m - 1]}{p - 1}, \quad u_0(x) \leq z(0, x), \quad x \in R^N$$

Тогда для решения задачи (1)-(2) имеет место оценка

$$u(t, x) \leq z(\tau, r), \quad r \in R, \quad t > 0,$$

где

$$z(\tau, r) = a_1(\tau)(f_1(\tau) - r^\gamma)_+^{\gamma_1}, \quad \gamma = p / (p - 1), \quad \gamma_1 = (p - 1) / (k(p - 2) + m - 1).$$

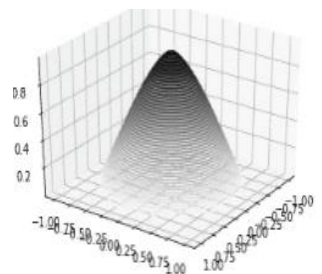
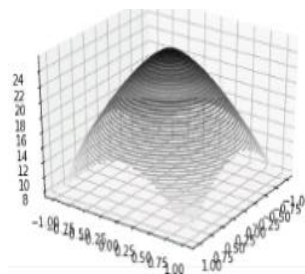
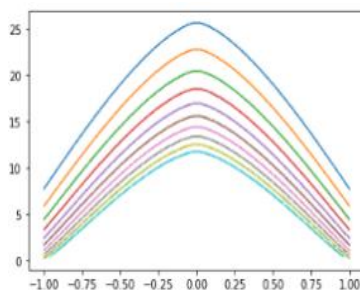
На Рис.1. приведены графики решения задачи (1)-(2) для значений  $p=3, k=1.3, m = 1.3$  и  $p = 4, k=1.1, m = 1.1$ , когда  $q > 1$  и  $0 < q < 1$ .

На Рис.2. приведены графики решения задачи (1)-(2) для значений  $k=1.3, p = 3.5, m=1.1$ , когда  $q < 0$  и  $k = 2, p = 3, m = 1.1$ .

Рис.1.Численные результаты для различных значений параметров при  $q > 1$  и  $0 < q < 1$

Значения параметров  
 $p = 3, k=1.3, m = 1.3,$   
 $q > 1$

радиально-симметричная структура



$$p = 4, k = 1.1, m = 1.1, 0 < q < 1$$

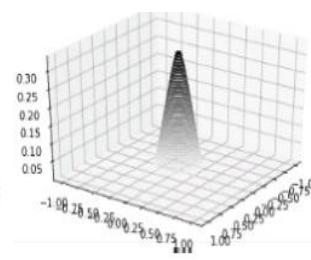
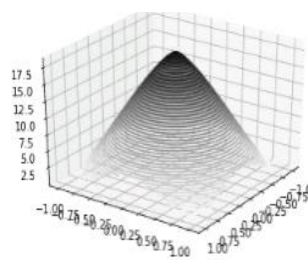
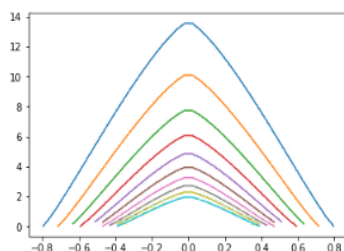


Рис.2. Численные результаты для различных значений параметров при  $q < 0$ .

Значения параметров	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
$k = 1.3, p = 3.5, m = 1.1, q = -0.3 < 0, \gamma = 1.4, \gamma_1 = 0.8$			
$k = 2, p = 3, m = 1.1, q = -0.1 < 0, \gamma = 1.5, \gamma_1 = 0.625'$			

На Рис.1. и на Рис.2. приведены графики изменения популяции при разных значениях параметров объемного вымирания. Доминирующим фактором в биологической популяции становится динамика изменения популяции, волна роста сменяется волной вымирания, популяция со временем начинает уменьшаться. В конечный момент времени график сжимается до точки, и популяция прекращает свое существование.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aripov M. Abdullaeva Z., On the bottom of the exact solution of a nonlinear problem with absorption or a source. Bulletin of the TATU, №4 2016, 107-113.
2. Wang M., Wei Y. Blow-up properties for a degenerate parabolic system with nonlinear localized sources // J. Math. Anal. Appl. 343 ,2008, p.621- 635.
3. Raimbekov J.R. The Properties of the Solutions for Cauchy Problem of Nonlinear Parabolic Equations in Non-Divergent Form with Density // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2015, 8(2), p.192-200.

4. Aripov M., Sadullayeva Sh., To properties of solutions to reaction diffusion equation with double nonlinearity with distributed parameters”, Jour. of Siberian Fed. Univer. Math. & Phys. 6, 2013, pp. 157-167.
5. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений // Изд. 2-е, доп. — М.: Наука, 1966, 688 с.
6. Aripov M., Sayfullayeva M. Problems of the biological population in a non-divergent form, *Ijm sarchashmalari* 8, 2020, pp.14–19
7. Aripov M., Sayfullayeva M. and Kabiljanova F., Exact solution of a double nonlinear problem of biological population with absorption and with migration, in 2021 International Conference on Information Science and Communications Technologies (ICISCT) (IEEE, 2021) pp. 1–4
8. Aripov M., Sayfullayeva M., Kabiljanova F., Bobokandov M., About one exact solution to the nonlinear problem of a biological population with absorption in a heterogeneous medium, *AIP Conf. Proc.* 3085, 020031, 2024.
9. Будянский А.В., Цибулин В.Г., Моделирование пространственно-временной миграции близкородственных популяции, *Компьютерные исследования и моделирование*, 2011, том 3, №.4, с.477-488.
10. Zhou WS, Wu ZQ: Some results on a class of degenerate parabolic equations not in divergence form. *Nonlinear Anal.* 60, 2005, pp. 863-886
11. Yao ZA, Zhou WS: Some results on a degenerate and singular diffusion equation. *Acta Math. Sin. Ser. B* 27, 2007, pp.581-601
12. Zhou WS: Some notes on a nonlinear degenerate parabolic equation. *Nonlinear Anal.* 71, 2007, pp.107-111
13. Wang J: Behaviors of solutions to a class of nonlinear degenerate parabolic equations not in divergence form. *Appl. Math. Lett.* 24, 2011, pp.191-195
14. Мартинсон Л.К., Нелинейные эффекты в процессе эволюции тепловых структур, // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1984, том 24, №3, с.462–467.