DOI: https://doi.org/10.37547/supsci-ojpm-01-01-01 Pages: 1-9

Oriental Journal of Physics and Mathematics SJIF 2021-5.778, 2022-5.912

SUPPORT SCIENCE

ORIENTAL JOURNAL OF PHYSICS AND MATHEMATICS

journal homepage:
https://www.supportscience.uz/index.php/ojpm

IN MATH CLASSES, TEACH STUDENTS TO SOLVE SOME EQUATIONS BY SOLVING A SYSTEM OF EQUATIONS

M. Asqaraliyeva
Lecturer
Kokand State Pedagogical Institute
Kokand, Uzbekistan

A. Sobirov
Student
Kokand State Pedagogical Institute
Kokand, Uzbekistan

ABOUT ARTICLE

Key words: trigonometry, equation, artificial, substitution, method.

Received: 13.06.22
Accepted: 15.06.22
Published: 17.06.22

Abstract: This article describes how to solve some equations in a system of equations of equal strength, and gives examples of their solutions.

MATEMATIKA TO‘GARAKLARIDA O‘QUVCHILARGA BA’ZI TENGLAMALARNI TENGLAMALAR SISTEMASIGA KELTIRIB YECHISHNI O‘RGATISH

M. Asqaraliyeva
O‘qituvchi
Qo‘qon davlat pedagogika institute
Qo‘qon, O‘zbekiston

A. Sobirov
Talaba
Qo‘qon davlat pedagogika institute
Qo‘qon, O‘zbekiston

MAQOLA HAQIDA

Kalit so‘zlar: Trigonametriya, tenglama, sun’iy, almashtirish, usul.

Annotatsiya: Mazkur maqolada ba’zi tenglamalarni unga teng kuchli tenglamalar sistemasiga keltirib yechish usullari yoritilgan hamda ularga oid misollar yechib ko‘rsatilgan.

НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ НАУЧИТЕ УЧАЩИХСЯ РЕШАТЬ НЕКОТОРЫЕ УРАВНЕНИЯ, РЕШАЯ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ

М. Аскаралиева
преподаватель
Кокандский государственный педагогический институт
Коканд, Узбекистан

А. Собиров
Студент
Кокандский государственный педагогический институт
Коканд, Узбекистан

О СТАТЬЕ

Ключевые слова: тригонометрия, уравнение, искусственное, замещение, метод.

Аннотация: В данной статье описано, как решать некоторые уравнения в системе уравнений равной силы, и приведены примеры их решения.

KIRISH

Matematika to‘garaklari, matematika sinfdan tashqari ishning asosiy turi hisoblanadi. To‘garaklar o‘quvchilarda fanga qiziqish uyg‘otib, ularning matematik tafakkurini, malakalarini, matematik tayyorgarliklari sifatini oshirishga xizmat qiladi.Biz quyida ba’zi tenglamalarni tenglamalar sistemasiga keltirib yechishni o‘rganamiz. Bu esa o‘quvchilarni fikrlash doirasini yanada oshiradi.

ASOSIY QISM

1. $f_1^2(x)+f_2^2(x)+...+f_k^2(x)=0$ yoki $|f_1(x)|+|f_2(x)|+...+|f_k(x)|=0$ ko‘rinishidagi tenglamalarni yechish.

$$f_1^2(x)+f_2^2(x)+...+f_k^2(x)=0 \quad (1)$$

$$|f_1^2(x)|+|f_2^2(x)|+...+|f_k(x)|=0 \quad (2)$$

ko‘rinishdagi tenglamalar

$$\begin{cases} f_1(x)=0 \\ \vdots \\ f_k(x)=0 \end{cases}$$

(3) tenglamalar sistemasiga teng kuchli.

1-misol. $x^4+5\cdot 4^x+4x^2\cdot 2^x-2\cdot 2^x+1=0$ (4) tenglamani yeching.

Yechish. (4) tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozamiz.

$$(x^2+2\cdot 2^x)^2+(2^x-1)^2=0 \quad (5)$$

Bundan (5) tenglama $\begin{cases} x^2+2\cdot 2^x=0 \\ 2^x-1=0 \end{cases}$ (6) tenglamalar sistemasiga teng kuchli. (6) sistemaning 2-tenglamasi $x=0$ yagona yechimga ega bo‘lib, u sistemaning birinchi tenglamasini qanoatlantirmaydi. Natijada (6) sistema yechimga ega emas

2-misol. $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{\log^2_{\frac{1}{7}}(x^2-4x+4)}=0$ (7) tenglamani yeching.

Yechish. (7) tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozamiz.

$$|x-3|+\left|\log_{\frac{1}{7}}(x^2-4x+4)\right|=0$$

Bu tenglama quyidagi tenglamalar sistemasiga teng kuchli.

$$\begin{cases} x-3=0 \\ \log_{\frac{1}{7}}(x^2-4x+4)=0 \end{cases} \quad (8)$$

Bu tenglamalardan birinchisining yechimi $x=3$. Tekshirish bu son ikkinchi tenglamaning ham yechimi ekanligini ko‘rsatadi. Natijada $x=3$ berilgan (7) tenglamaning yechimidir.

J: $x=3$.

(3) sistemaga keltiriladigan boshqa bir qator tenglamalarni ko‘rib o‘tamiz.

3-misol. $\log_2(1+\sqrt{x^4+x^2})+\log_2(1+x^2)=0$ (9) tenglamani yeching.

Yechish. Ixtiyoriy x uchun

$$\begin{cases} \log_2(1+\sqrt{x^4+x^2})\geq 0 \\ \log_2(1+x^2)\geq 0 \end{cases}$$

tengsizliklar o‘rinli. Shuning uchun (9) tenglama quyidagi tenglamalar sistemasiga teng kuchli.

$$\begin{cases} \log_2(1+\sqrt{x^4+x^2})=0 \\ \log_2(1+x^2)=0 \end{cases}$$

sistema yagona $x=0$ yechimga ega.

J: $x=0$.

2.Funksiyaning chegaralanganligidan foydalanish.

Agar $f(x)=g(x)$ (10) tenglamalarni yechishda biror M to‘plamga tegishli hamma x lar uchun

$f(x)\leq A$ va $g(x)\geq A$

tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, u holda M to‘plamda (10) tenglama quyidagi tenglamalar sistemasiga teng kuchli bo‘ladi.

$$\begin{cases} f(x)=A \\ g(x)=A \end{cases} \qquad (11)$$

4-misol. $4x^2+4x+17=\dfrac{12}{x^2-x+1}$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozamiz.

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4=\frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \qquad (12)$$

ko‘rinib turibdiki, ixtiyoriy x haqiqiy son uchun

$$g(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4\geq 0; \qquad f(x)=\frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\leq 4.$$

Natijada (12) tenglama quyidagi tenglamalar sistemasiga teng kuchli.

$$\begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4=4 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Bu sistema yechimga ega emas, shuning uchun berilgan tenglama yechimga ega bo‘lmaydi.

J: $\varnothing$.

5-misol. $\cos^2(x\sin x)=1+\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}$ (13) tenglamani yeching.

Yechish. (13) tenglama barcha haqiqiy x lar uchun aniqlangan. Ixtiyoriy x uchun $\cos^2(x\sin x)\leq 1,\quad 1+\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}\geq 1$.

Natijada (13) tenglama quyidagi tenglamalar sistemasiga teng kuchli.

$$\begin{cases} \cos^2(x\sin x)=1 \\ \log_5^2\sqrt{x^2+x+1}=0 \end{cases} \qquad (14)$$

(2) sistema 2-tenglamasining yechimi $x=0$ va $x=-1$. Bu qiymatlardan 1-tenglamani faqat $x=0$ qanoatlantiradi. Demak, $x=0$ berilgan tenglamaning yagona yechimi ekan.

J: 0.

6-misol. $\cos^7 x+\sin^5 x=1$ (15) tenglamani yeching.

Yechish. $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ bo‘lgani uchun (15) tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozamiz $\cos^7 x+\sin^5 x=\cos^2 x+\sin^2 x$ yoki

$$\cos^2 x(\cos^5 x-1)=\sin^2 x(1-\sin^3 x) \qquad (16)$$

Ixtiyoriy x uchun $\sin^2 x \geq 0$, $\cos^2 x \geq 0$, $\cos^5 x - 1 \leq 0$, $1 - \sin^3 x \geq 0$ bo‘lgani uchun (16) tenglama quyidagi sistemaga teng kuchli

$$\begin{cases} \cos^2 x(\cos^5 x - 1) = 0 \\ \sin^2 x(1 - \sin^3 x) = 0 \end{cases} \qquad (17)$$

(17) sistema quyidagi tenglamalar sistemasi majmuasiga teng kuchli.

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1 \end{cases} \qquad (18)$$

Birinchi sistemaning yechimi $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in z$, ikkinchi sistemaning yechimi $x = 2\pi m$, $m \in z$. Hamma bu yechimlar berilgan tenglamaning yechimi bo‘ladi.

J: $x = 2\pi m$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $m, k \in z$.

3.Sinus va kosinus funksiyalar xossalaridan foydalanish.

Ko‘pgina trigonometrik tenglamalarni yechish tenglamalar sistemasini yechishga keltirilishi mumkin. Bunday tenglamalarga misol qilib quyidagi tenglamalarni keltirish mumkin.

$$\sin\alpha x \cdot \sin\beta x = \pm 1$$

$$\sin\alpha x \cdot \cos\beta x = \pm 1$$

$$A(\sin\alpha x)^m + B(\cos\beta x)^n = \pm(|A| + |B|)$$

$$A(\sin\alpha x)^m + B(\sin\beta x)^n = \pm(|A| + |B|) \qquad (19)$$

bunda α, β, A, B berilgan haqiqiy sonlar, n va m - berilgan natural sonlar. Bunday tenglamalarni yechishda sinusning quyidagi xossasidan foydalaniladi: agar biror x_0 soni uchun qat’iy $|\sin\alpha x_0| < 1$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa,u holda x_0 soni (19) tenglamalardan birortasining ham yechimi bo‘lmaydi. Xuddi shuningdek

$$\cos\alpha x \cdot \cos\beta x = \pm 1$$

$$A(\sin\alpha x)^m + B(\cos\beta x)^n = \pm(|A| + |B|)$$

tenglamalarni yechishda kosinus xossasidan foydalaniladi: agar biror x_0 soni uchun qat’iy $|\cos\alpha x_0| < 1$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda x_0 soni bu tenglamalardan birortasining ham yechimi bo‘lmaydi.

7-misol. $\sin x \cdot \cos 4x = 1$ (20) tenglamani yeching.

Yechish. Agar x_0 (20) tenglamaning yechimi bo‘lsa, u holda yo $\sin x_0 = 1$ yoki $\sin x_0 = -1$ bo‘ladi. Haqiqatan ham agar $|\sin x_0| < 1$ bo‘lsa (20) tenglamadan $|\cos 4x_0| > 1$ bo‘lishi kerak edi, ammo bu bo‘lishi mumkin emas. Agar $\sin x_0 = 1$ bo‘lsa (20) tenglamadan $\cos 4x_0 = 1$ ekanligi, agar $\sin x_0 = -1$ bo‘lsa, $\cos 4x_0 = -1$ ekanligi kelib chiqadi. Natijada (20) tenglamaning ixtiyoriy yechimi quyidagi 2 ta sistemalardan birining yechimi bo‘ladi.

$$\begin{cases} \sin x_0 = 1 \\ \cos 4x_0 = 1 \end{cases} \qquad (21)$$

$$\begin{cases} \sin x_0 = -1 \\ \cos 4x_0 = -1 \end{cases} \qquad (22)$$

(21) va (22) sistemalarning ixtiyoriy yechimi (20) tenglamaning yechimi ekanligini oson ko‘rish mumkin. Natijada (20) tenlama (21) va (22) tenglamalar sistemasi majmuasiga teng kuchli. Bu sistemalarni yechamiz.

(21) sistemaning birinchi tenglamasidan

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad k \in z\ .$$

Bularning hammasi bu sistemaning ikkinchi tenglamasini qanoatlantiradi va (21) sistemaning yechimi bo‘ladi. (22) sistemaning birinchi tenglamasi

$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi e; \quad e \in z$ yechimga ega.

Bu sonlardan birortasi bu sistemaning ikkinchi tenglamasini qanoatlantirmaydi. Shuning uchun (22) sistema yechimga ega emas. Demak, berilgan (20) tenglamaning yechimi (21) sistemaning yechimi bilan ustma – ust tushadi.

J: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad k \in z\ .$

8-misol. $3\cos^4 2x - 2\sin^5 x = 5$ (23) tenglamani yeching.

Yechish. Agar x_0 (23) tenglamaning yechimi bo‘lsa u holda $|\cos 2x_0| = 1,$ aks holda $|\sin x_0| > 1$ tengsizlik o‘rinli bo‘lishi kerak, bu esa mumkin emas.

Ammo, agar $|\cos 2x_0| = 1$ bo‘lsa (23) tenglamadan $\sin x_0 = -1$. Shuning uchun (23) tenglamaning ixtiyoriy yechimi quyidagi sistemaning yechimi bo‘ladi.

$$\begin{cases} \sin x = -1 \\ |\cos 2x| = 1 \end{cases} \qquad (24)$$

(24) sistemaning ixtiyoriy yechimi (23) tenglamaning yechimi bo‘ladi. Demak, (23) tenglama (24) sistemaga teng kuchli. (24) sistemaning birinchi tenglamasi

$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi e, \quad e \in z$ yechimga ega.

Bularning hammasi (24) sistemaning 2-tenglamasini qanoatlantiradi. Natijada u (23) tenglamaning yechimi bo‘ladi.

J: $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi e, \quad e \in z$.

9-misol. $\cos^3 3x + \cos^{11} 7x = -2$ (25) tenglamani yeching.

Yechish. Agar x_0 (25) tenglamaning yechimi bo‘lsa, u holda $\cos 3x_0 = -1$ (aks holda $\cos 7x_0 < -1$ bo‘lishi mumkin emas). Demak, $\cos 7x_0 = -1$. Natijada (25) tenglamaning ixtiyoriy yechimi quyidagi sistemaning yechimi bo‘ladi.

$$\begin{cases} \cos 3x = -1 \\ \cos 7x = -1 \end{cases} \qquad (26)$$

(26) sistemaning ixtiyoriy yechimi (25) tenglamaning yechimi bo‘ladi. Shuning uchun (25) tenglama (26) sistemaga teng kuchli. (26) sistemaning 1-tenglamasi

$x_k = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in z$ yechimga ega.

Bu yechimlardan (26) sistema 2-tenglamasini qanoatlantiradiganlarini topamiz. Bular quyidagi tenglikni qanoatlantiradigan $m \in z$ sonlaridir.

$$\frac{7\pi}{3} + \frac{14\pi k}{3} = \pi + 2\pi m \qquad (27)$$

(27) ni quyidagi ko‘rinishda yozamiz

$$k = \frac{3m-2}{7} \qquad (28)$$

k va m lar butun sonlar bo‘lgani uchun (28) tenglik $m = 7t + 3, \quad t \in z$ da o‘rinli, ammo bunda

$k = 3t + 1, \quad t \in z$.

Demak, (26) sistemaning yechimi shunday x_k larki, $k = 3t + 1, \quad t \in z$.

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi t + \frac{2\pi}{3}, \quad t \in z.$$

J: $x = \pi + 2\pi t, \quad t \in z$.

4.Sonli tengsizliklardan fodalanish.

Ba’zi hollarda biror sonli tengsizlikni tenglamaning biror qismiga qo‘llab, tenglamani teng kuchli sistemaga almashtirish mumkin. Bunday tengsizliklarga misol qilib ikkita musbat a va b sonlarning o‘rta arifmetigi va o‘rta geometrigi orasidagi $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ bog‘lanishni olamiz, tenglik belgisi $a = b$ da o‘rinli.

Ko‘p hollarda quyidagi tengsizliklarning natijasidan foydalanish qulay $a>0$ *da* $a+\frac{1}{a}\geq 2$, $a=1$ *da* $a+\frac{1}{a}=2$, $a<0$ *da* $a+\frac{1}{a}\leq -2$, $a=-1$ *da* $a+\frac{1}{a}=-2$.

10-misol. $$\sqrt{x^2+2x+4}+\frac{4}{\sqrt{x^2+2x+4}}=4-\log_3^4(x^2+x^4+1) \qquad (29)$$

tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasi hamma haqiqiy sonlardir. (29) tenglamaning chap qismini $2\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x^2+2x+4}}\right)$ ko‘rinishda yozamiz.

U 4 dan kichik emasligini fahmlaymiz. 2 ta o‘zaro teskari musbat sonlar yig‘indisi faqat $x=0$ da 4 ga teng. Bir paytda $x=0$ da tenglamaning o‘ng qismi ham 4 ga teng. $x\neq 0$ da 4 dan kichik. Natijada $x=0$ (29) tenglamaning yagona yechimidir.

J: $x=0$.

11-misol. $$\left(\frac{1}{\sin^8}+\frac{1}{\cos^2 2x}\right)\left(\sin^8 x+\cos^2 2x\right)=4\cos^2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-x^2} \qquad (30)$$ tenglamani yeching.

Yechish. Ixtiyoriy musbat a va b sonlari uchun $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)\geq 4$ (31) tengsizlik o‘rinli ekanini isbotlaymiz. Avval $\frac{1}{a}$ va $\frac{1}{b}$ sonlari uchun, keyin a va b sonlari uchun o‘rta arifmetik va o‘rta geometrik orasidagi tengsizlikni qo‘llab $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\geq\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}$ va $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ ni hosil qilamiz.

Bundan $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq 1$ $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)\geq 4$.

XULOSA

(30) tenglamaning aniqlanish sohasida $\sin^8 x>0,\quad \cos^2 2x>0$ bo‘lgani uchun

(31) tengsizlikni qo‘llab (30) tenglamaning chap qismi 4 dan kichik emasligini ko‘ramiz. Shu bilan birga (30) tenglamaning aniqlanish sohasida $4\cos^2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-x^2}\leq 4$.

Natijada (30) tenglama quyidagi tenglamalar sistemasiga teng kuchli.

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{\sin^8 x}+\dfrac{1}{\cos^2 2x}\right)\left(\sin^8 x+\cos^2 2x\right)=4\\ \cos^2\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4}-x^2}=1\end{cases} \qquad (32)$$

(32) sistemaning 2-tenglamasining yechimi $x_1=\frac{\pi}{2}$ va $x_2=-\frac{\pi}{2}$. Bularni (32) sistemaning birinchi tenglamasiga qo‘yib, tenglamaning yechimi ekanini ko‘ramiz. Demak, $x_1=\frac{\pi}{2}$ va $x_2=-\frac{\pi}{2}$ lar berilgan tenglamaning yechimlari bo‘ladi.

J: $x_1=\frac{\pi}{2}$ va $x_2=-\frac{\pi}{2}$.

12-misol. $\lg(\cos x-0{,}5)+\lg(\sin x-0{,}3)+1=0$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglama yechimga ega emasligini isbotlaymiz. Uni potensirlab $(\cos x-0{,}5)(\sin x-0{,}3)=\frac{1}{10}$ ko‘rinishga keltiramiz. Chap qismini o‘rta arifmetik va o‘rta geometrik orasidagi tengsizlikka asosan $\left(ab\le\frac{1}{4}(a+b)^2\right)$ baxolaymiz.

$$(\cos x-0{,}5)(\sin x-0{,}3)=\left(\frac{\cos x+\sin x-0{,}8}{2}\right)^2\le\left(\frac{\sqrt{2}-0{,}8}{2}\right)^2<$$

$$<\left(\frac{1{,}42-0{,}8}{2}\right)^2=(0{,}31)^2<0{,}1$$

Tenglamaning chap qismi o‘ng qismidan kichik. Demak, tenglama yechimga ega emas.

J: $\varnothing$.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Олехник С.Н. и др. Уравнения и неравенства. Нестандартние решений. 10-11 класси. Учебно-метод. пособийе. Москва. 2001.

2. Alimov SH.A.va boshqalar. Algebra va analiz asoslari. 10-11 sinf. Darslik. 2001.

3. Mirzaahmedov M. va boshqalar. Matematikadan olimpiada masalalari. Toshkent. O‘qituvchi. 1997.