DOI: https://doi.org/10.37547/supsci-ojpm-03-03-02 Pages: 8-18

Oriental Journal of Physics and Mathematics SJIF 2022-5.912

ORIENTAL JOURNAL OF PHYSICS AND MATHEMATICS

journal homepage:
https://www.supportscience.uz/index.php/ojpm

DYNAMICALLY STRESS-STRAIN STATE OF TWO-LAYER VISCOELASTIC CYLINDERS UNDER DYNAMIC EXCITATION

Anvarbek Sh. Ruzimov
Lecturer
Tashkent Institute of Chemical Technology
Tashkent, Uzbekistan

ABOUT ARTICLE

Key words: kinematic, dynamic, deformation, integral, viscoelastic.

Received: 02.06.23
Accepted: 04.06.23
Published: 06.06.23

Abstract: This article considers the dynamically stress-strain state of two-layer viscoelastic cylinders under internal (or kinematic) excitation. The relationship between stress and strain is satisfied by the Boltzmann-Volterra integral relations. The problem is reduced to a plane problem of the theory of viscoelasticity. The stated problem is solved by the Green-Lamb potential method. The resulting integro-differential equations in partial derivatives are solved using special Bessel and Hankel functions of the 1st and 2nd kind of the nth order. Solutions are expressed in terms of special functions of the complex argument. To determine the integral constants, a system of algebraic equations with complex coefficients is obtained. Numerical solutions are obtained and an analysis is made. The relevance of the study of the stress-strain state of structures under the action of dynamic loads, taking into account the viscoelastic properties of the material, is due to their widespread use in modern mechanical engineering. A typical example of such structures is a viscoelastic cylinder with a centrally located channel (cylindrical or non-trivial geometry). The body is made of materials with high specific strength. Composite materials are used depending on the purpose of the rocket, its size and operating loads.

DINAMIK QO'ZG'ALISH OSTIDA IKKI QATLAMLI VISKOELASTIK TSILINDRLARNING DINAMIK KUCHLANISH-DEFORMATSIYA HOLATI

Anvarbek Sh.Ro'zimov
o'qituvchi
Toshkent kimyo-texnologiya instituti
Toshkent, O'zbekiston

MAQOLA HAQIDA

Kalit so'zlar: kinematik, dinamik, deformatsiya, integral, viskoelastik.

Annotatsiya: Ushbu maqola ichki (yoki kinematik) qo'zg'alish ostida ikki qatlamli viskoelastik tsilindrlarning dinamik kuchlanish-deformatsiya holatini ko'rib chiqadi. Stress va kuchlanish o'rtasidagi bog'liqlik Boltsmann-Volterra integral munosabatlari bilan qondiriladi. Muammo viskoelastiklik nazariyasining tekis muammosiga tushiriladi. Belgilangan muammo Green-Lamb potentsial usuli bilan hal qilinadi. Qisman hosilalarda hosil bo'lgan integrodifferensial tenglamalar n-tartibning 1 va 2-turdagi maxsus Bessel va Hankel funksiyalari yordamida yechiladi. Yechimlar kompleks argumentning maxsus funksiyalari bilan ifodalanadi. Integral konstantalarni aniqlash uchun kompleks koeffitsientli algebraik tenglamalar tizimi olinadi. Raqamli yechimlar olinadi va tahlil qilinadi. Materialning viskoelastik xususiyatlarini hisobga olgan holda dinamik yuklarning ta'siri ostida konstruksiyalarning kuchlanish-deformatsiya holatini o'rganishning dolzarbligi ularning zamonaviy mashinasozlikda keng qo'llanilishi bilan bog'liq. Bunday tuzilmalarning odatiy namunasi - markazda joylashgan kanalga ega bo'lgan viskoelastik silindr (silindrsimon yoki ahamiyatsiz geometriya). Korpus yuqori o'ziga xos kuchga ega bo'lgan materiallardan tayyorlangan. Kompozit materiallar raketaning maqsadiga, uning o'lchamiga va ish yuklariga qarab qo'llaniladi.

ДИНАМИЧЕСКИ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХСЛОЙНЫЕ ВЯЗКОУПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Анварбек Ш. Рузимов
преподаватель
Ташкентского химико-технологического института
Ташкент, Узбекистан

О СТАТЬЕ

Ключевые слова: кинематический, динамический, деформационный, интегральный, вязкоупругий.

Аннотация: В этой статье рассматривается динамически напряженно-деформированное состояние двухслойных вязкоупругих цилиндров при внутреннем (или кинематическом) возбуждении. Связь между напряжением и деформацией удовлетворяют интегральные соотношения Больцмана- Вольтерра. Задача сводится к плоской задаче теории вязкоупругости. Поставленная задача решается методом потенциала Грин - Лэмба. Полученные интегро-дифференциальные уравнения в частных производных решаются с помощью специальных функций Бесселя и Ханкеля 1-го и 2- го рода n- го порядка. Решения выражаются через специальные функции комплексного аргумента. Для определения интегральных постоянных получена система алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами. Получены численные решения и сделан анализ. Актуальность исследования напряженно – деформированного состояния конструкций, находящихся под действием динамических нагрузок, с учетом вязкоупругих свойств материала, обусловлена широким применением их в современном машиностроении. Характерным примером таких конструкций является вязкоупругий цилиндр с центрально расположенным каналом (цилиндрическими или с нетривиальной геометрией). Корпус изготавливается из материалов, имеющих высокую удельную прочность. В зависимости от назначения ракеты, ее размеров и действующих нагрузок применяются композитные материалы.

ВВЕДЕНИЕ

В этой статье рассматривается динамически напряженно- деформированное состояние двухслойных вязкоупругих цилиндров при внутреннем (или кинематическом) возбуждении. Связь между напряжением и деформацией удовлетворяют интегральные соотношения Больцмана- Вольтерра. Задача сводится к плоской задаче теории вязкоупругости. Поставленная задача решается методом потенциала Грин - Лэмба. Полученные интегро-дифференциальные уравнения в частных производных решаются с помощью специальных функций Бесселя и Ханкеля 1-го и 2- го рода n- го порядка. Решения выражаются через специальные функции комплексного аргумента. Для определения интегральных постоянных получена система алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами. Получены численные решения и сделан анализ. Актуальность исследования напряженно –деформированного состояния конструкций, находящихся под действием динамических нагрузок, с учетом вязкоупругих свойств материала, обусловлена широким применением их в современном машиностроении. Характерным примером таких конструкций является вязкоупругий цилиндр с центрально расположенным каналом (цилиндрическими или с нетривиальной геометрией). Корпус изготавливается из материалов, имеющих высокую удельную прочность. В зависимости от назначения ракеты, ее размеров и действующих нагрузок применяются композитные материалы.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Постановка задачи и методики решения

В данной главе рассматриваются вопросы расчета вязкоупругих оболочек, содержащих вязкоупругий массив (заполнитель) (рис.1). Особый интерес представляют колебания в плоскости rz (осесимметричная задача), а также колебания рассматриваемой механической системы в плоскости $r\varphi$, не зависящие от продольной координаты z ,которые называется плоскими изгибными колебаниями. Рассматривается динамически напряженно-деформированное состояние вязкоупругого цилиндрического тела в состоянии приложенного внутреннего силового или кинематического воздействия. Кинематическое воздействие оказывается на внутреннею оболочку. Предполагается, что задача дана в цилиндрических координатах (r,φ,z) цилиндрического тела с радиусом r=a и b (соответственно, внутренний и внешний радиусы).

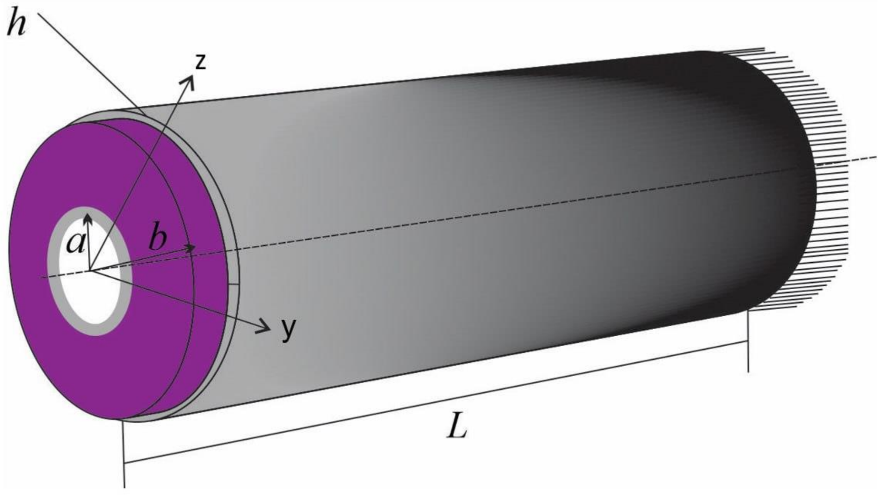

Рис. 1. Расчетная схема.

Связь между напряжением и деформацией удовлетворяет следуюшей интегралной зависимости [1]:

$$\sigma_{ij} = \tilde{\lambda}\theta\delta_{ij} + 2\tilde{\mu}\hat{\varepsilon}_{ij},$$

$$\tilde{\lambda}\, f(t) = \lambda_0 \left[f(t) - \int_0^t R_\lambda(t-\tau) f(\tau) d\tau \right],$$

$$\tilde{\mu}\, f(t) = \mu_0 \left[f(t) - \int_0^t R_\mu(t-\tau) f(\tau) d\tau \right]. \quad (1)$$

Здесь $\hat{\varepsilon}_{ij}$ - компоненты тензора деформации; θ - обёмная деформация; $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}$ - операторные модули упругости; δ_{ij} - симкол Кронекера; $f(t)$ –произвольная функция времени; $R_{Ek}(t-\tau)$ –релаксация ядра, λ_0 и μ_0 - мгновенные модули упругости оболочки.

Задача плоского деформированного состояния. Уравнение малых колебаний цилиндра в случае плоского деформируемого состояния (радиальную u_r и тангенциальную u_φ компоненты считаем не зависимыми от осевой координаты z) имеет следующий вид [2]:

$$\tilde{\mu}\nabla^2 u_r + \tilde{\mu}/(1-2\bar{\nu})\frac{\partial\theta}{\partial r} - \tilde{\mu}\frac{u_r}{r^2} + \tilde{\mu}\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} - \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = 0,$$

$$\tilde{\mu}\nabla^2 u_\varphi + \tilde{\mu}/(1-2\bar{\nu})\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} - \tilde{\mu}\frac{u_\varphi}{r^2} + \tilde{\mu}\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - \rho\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Здесь

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

$$\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}.$$

На границе r=b задана гармоническая кинематическая нагрузка в виде

$$u_r(a,\varphi,t) = U_R(a)\cos(n\varphi)e^{i\nu_\omega t}, u_\varphi(a,\varphi,t) = -U_R(a)\sin(n\varphi)e^{i\nu_\omega t}, \quad (3)$$

где U_R - амплитуда перемещенной внутренней поверхности цилиндра, ν_ω -частота внешних нагрузок. На внутренней поверхности r=*a* ставится условие свободы от усилий

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = 0. \quad (4)$$

Интегродифференциальное уравнение (2) решается в потенциальных перемешениях ϕ (потенциалы продольных волн) и ψ (потенциалы поперечных волн), каторое удовлетворяет следующим интегродифференциальным уравнениям в частных производных

$$\nabla^2\phi - \int_{-\infty}^{t} R_E\left(t-\tau\right)\nabla^2\phi d\tau = \frac{1}{C_{p0}^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2},\ \nabla^2\psi - \int_{-\infty}^{t} R_\mu\left(t-\tau\right)\nabla^2\psi d\tau = \frac{1}{C_{s0}^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \quad (5)$$

где $\vec{\psi}_j(0,0,\psi)$ - векторная величина. Тогда связ между перемещениями цилиндра и потенцалами перемещений прнимает следующий вид [3]:

$$u_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, u_\varphi = -\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}.$$

Решение уравнения (5) ищется в виде

$$\begin{aligned} u_r\left(r,\varphi,t\right) &= U_R(r)\cos(n\varphi)e^{i\nu_\omega t}, \\ u_\varphi\left(r,\varphi,t\right) &= U_\varphi(r)\sin(n\varphi)e^{i\nu_\omega t}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $U_R(r)$ и $U_\varphi(r)$ - амплитуды перемещений, которые удовлетворяют

уравнению Гельмгольца комплексного коэффициента

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathrm{U}_R\left(r\right) + \alpha_1^2 \mathrm{U}_R\left(r\right) &= 0, \\ \nabla^2 \mathrm{U}_\varphi\left(r\right) + \beta_1^2 \mathrm{U}_\varphi\left(r\right) &= 0, \end{aligned} \quad . \quad (7)$$

Здесь

$$\alpha_1^2 = \frac{\nu_\omega^2}{C_{p0}^2\ (1-\Gamma_{\lambda 01})},$$

$$\beta_1^2 = \frac{\nu_\omega^2}{C_{s0}^2(1-\Gamma_{\mu 01})}, \Gamma_{\mu 01} = 1 - a_{\mu c} - ia_{\mu s}, \Gamma_{\lambda 01} = 1 - a_{\lambda c} - ia_{\lambda s},$$

$$a_{\mu c}\left(\omega\right) = \int_0^\infty R_{\mu 1}\left(\tau\right)\sin\omega\tau\, d\tau,\ b_{\mu s}\left(\omega\right) = \int_0^\infty R_{\mu s}\left(\tau\right)\cos\omega\tau\, d\tau,$$

$$a_{\lambda c}\left(\omega\right) = \int_0^\infty R_{\lambda 1}\left(\tau\right)\sin\omega\tau\, d\tau,\ b_{\lambda s}\left(\omega\right) = \int_0^\infty R_{\lambda s}\left(\tau\right)\cos\omega\tau\, d\tau$$

Таким образом, совместные решения уравнений Гельмгольца (7) с учетом (4) и (6) выражаются через специальные функции Бесселя и Ханкеля [4]. Перемещение цилиндрического тела принимает следующий вид

$$u_r = \sum_{k=1}^{4} A_k U_k(r)\cos(n\varphi)e^{i\nu_\omega t} =$$

$$= \left\{ \gamma_1 \left[A_1 J_n'(\gamma_1 r) + A_2 Y_n'(\gamma_1 r) \right] + \frac{n}{r}\left[A_3 J_n(\gamma_2 r) + A_4 Y_n(\gamma_2 r) \right] \right\} \cos(n\varphi)e^{i\nu_\omega t},$$

$$u_\varphi = \sum_{k=1}^{4} A_k V_n(r)\sin(n\varphi)e^{i\nu_\omega t} =$$

$$= -\frac{n}{r}\left\{ \gamma_1 \left[A_1 J_n(\gamma_1 r) + A_2 Y_n(\gamma_1 r) \right] + \frac{n\gamma_2}{r}\left[A_3 J_n'(\gamma_2 r) + A_4 Y_n'(\gamma_2 r) \right] \right\} \sin(n\varphi)e^{i\nu_\omega t},$$

(8)

где $A_k\,(k=1,2,3,4)$ - произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий (3) и (4). Тогда получаем систему неоднородных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами в виде

$$\sum_{k=1}^{4} A_k c_{kj} = P\ (j=1,2,3,4), P = \left\{0,0,p_1,p_2\right\}^T, \quad (9)$$

где

$$c_{11} = Z_1(\gamma_1 a); c_{12} = Z_1(\gamma_1 a); c_{13} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} Z_1(\gamma_1 a); c_{14} = Z_1(\gamma_1 a);$$

$$c_{21} = Z_2(\gamma_1 a); c_{22} = Z_2(\gamma_1 a); c_{23} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} Z_1(\gamma_2 a); c_{24} = Z_2(\gamma_1 a / M); \quad (10)$$

$$c_{31} = J_n'(\gamma_1 b); c_{32} = Y_n'(\gamma_1 b); c_{33} = \frac{n}{b} J_n(\gamma_2 r); c_{34} = \frac{n}{b} Y_n(\gamma_2 b);$$

$$c_{41} = \gamma_1 J_n(\gamma_1 b); c_{42} = \gamma_1 Y_n(\gamma_1 r); c_{43} = \frac{n\gamma_2}{b} J_n'(\gamma_2 r); c_{11} = \frac{n\gamma_2}{b} Y_n'(\gamma_2 r),$$

$$Z_1(z) = n\left[\frac{1}{z} J_n(z) - J_n'(z) \right];$$

$$Z_2(z) = J_n'(z) + zJ_n(z)\left[1 + \frac{1}{z^2}((\lambda_0 / 2\mu_0)(\mu_{01} a))^2 - n^2 \right].$$

Система алгебраических уравнений (10) является комплексными коэффицентами и решается методом Гаусса с выделением главного элемента.

Задача деформированного состояния цилиндра со скрепленной оболочкой. Пусть дана длинная оболочка с заполнителем. Конструкция находится под внутренним динамическим давлением. При напряжённом состоянии силовые фактории зависят от координатной системы. Тогда уравнение заполнителя сводится к определению трех скалярных потенциалов перемещений, удовлетворяющих уравнениям Гельмгольца

$$\nabla^2\phi_z + Al^2\phi_z = 0,\ \nabla^2\vec{\psi}_z + Bl^2\vec{\psi}_z = 0\,, \qquad (11)$$

в области, занятой вязкоупругим заполнителем (полый цилиндр) $a \le r \le b,\ 0 \le z \le l$

.

$$Al^2 = \frac{\omega^2}{C_{pz}^2(1-\Gamma_{\lambda\mu z})}, Bl^2 = \frac{\omega^2}{C_{sz}^2(1-\Gamma_{\mu z})}.$$

Компоненты вектора перемещенного заполнителя определяются с помощью потенциала перемещений

$$\begin{aligned}
u_{rz} &= \frac{\partial\phi_z}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi_{1z}}{\partial r\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_{2z}}{\partial\varphi},\\
u_{\varphi z} &= \frac{\partial\psi_{2z}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_{1z}}{\partial\varphi\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}, \qquad (12)\\
u_{zz} &= \frac{\partial\phi_z}{\partial z} + \frac{\partial^2\psi_{1z}}{\partial z^2} + \beta_z^2\psi_{1z}.
\end{aligned}$$

Здесь C_{pz}^2, C_{sz}^2 - соответственно скорости распространения продольных и поперечных волн заполнителя; $u_{rz}, u_{\varphi z}, u_{zz}$ – перемещения точек заполнителя. Дифференциальные уравнения колебаний изотропной оболочки в перемещениях имеют вид

$$\begin{aligned}
&B'\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + B'\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + B'\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\varphi} + B'\nu\frac{\partial w}{\partial\alpha} - m'b'^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,\\
&B'\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + B'\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} + B'\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\varphi} + B'\frac{\partial w}{\partial\varphi} - m'b'^2\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \qquad (13)\\
&B'\frac{\partial v}{\partial\varphi} + B'\nu\frac{\partial u}{\partial\alpha} + B'K'\nabla^2\nabla^2 w + B'w + m'b'^2\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{B}'\,f(t) = b_0\left[\,f(t) - \int_0^t R_B(t-\tau)\,f(\tau)d\tau\,\right], \qquad (14)$$

$f\left(t\right)$–произвольная функция времени, $R_B\left(t-\tau\right)$– ядра релаксации заполнителя, b_0 – мгновенные модули упругости материала. Далее заменим соотношение (14) следующими выражениями [5]:

$$\begin{aligned}
&\bar{B}'\,f(t) = b_0\left[1-\Gamma_B^C\left(\omega_R\right) - i\Gamma_B^S\left(\omega_R\right)\right]f(t),\\
&\Gamma_B^c\left(\omega_R\right) = \int_0^\infty R_B\left(\tau\right)\cos\omega_R\tau\,d\tau, \Gamma_B^s\left(\omega_R\right) = \int_0^\infty R_B\left(\tau\right)\sin\omega_R\tau\,d\tau
\end{aligned}$$

Предполагается, что к внутренней поверхности ($r = a$ или $r = b$) заполнителя приложена периодическая внешняя нагрузка (или давление)

$$p = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} p_{nm} \sin(n\pi / l)\cos(m\theta)e^{i\Omega t}.$$

Внешняя поверхность заполнителя скреплена с цилиндрической оболочкой. Края оболочек свободны, т.е. не закреплены. Другой конец заполнителя жёстко закреплен. Рассматривается консольная конструкция.

4.2. Численные результаты и их анализ

Задача решается в безразмерных параметрах. Для расчета приняты следующие значения параметров $\rho = 1.72 \cdot 10^{-3} кг / см^3,\ b = 0.900m, a = 0.150m, \nu = 0.25, p_{nm} = 1, E_z / E_0 = 0.1.$

Параметры ядра релаксации: ($R(t) = Ae^{-\beta t}t^{\alpha-1}$) следующие $A = 0,048;\quad \beta = 0,05;\quad \alpha = 0,1$. При этом выражения для смещений и напряжений получаются комплексными.

Действительные напряжения определяются вещественной частью, например

$$\mathrm{Re}\left[\left(\sigma_{rr}^{(1)} + i\sigma_{rr}^{(2)}\right)e^{i\Omega t}\right] = \sigma_{rr}^{(1)} \cos\Omega t - \sigma_{rr}^{(2)} \sin\Omega t,$$

или $\sqrt{\left[\sigma_{rr}^{(1)}\right]^2 + \left[\sigma_{rr}^{(2)}\right]^2} \cos(\Omega t + \xi).$

В качестве первого примера рассмотрим плоскую задачу приведённую на рис. 2. Рассматривается диссипативно-однородная задача. Оболочка и заполнитель вязкоупругие. Реологические параметры оболочек и заполнителя почти одинаковы. Результаты расчетов приведены на рис.3.

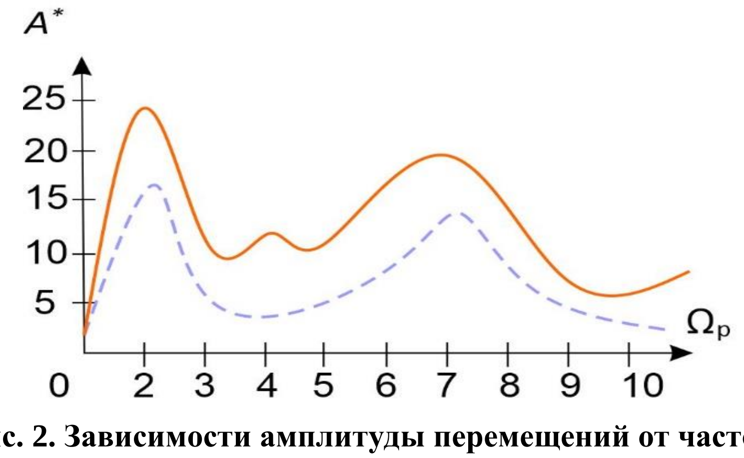

Рис. 2. Зависимости амплитуды перемещений от частоты.

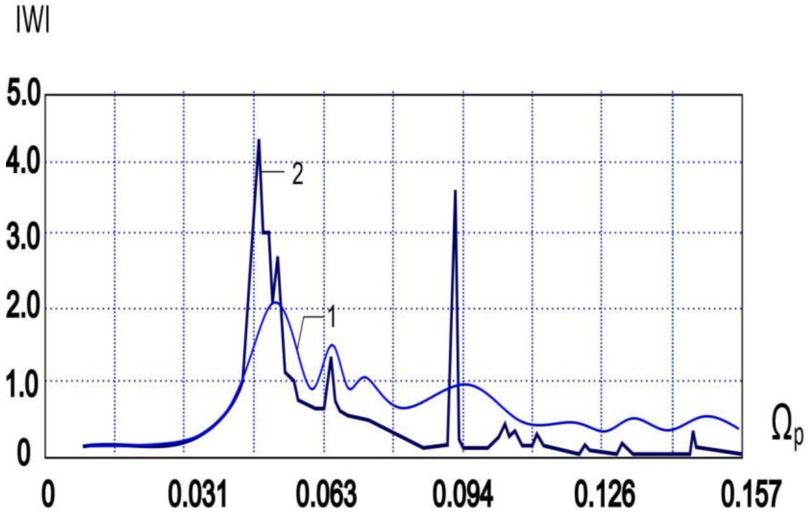

Рис. 3. Зависимости амплитуды перемещений от частоты.

1. A=0.01,2. A=0.001.

На рисунке 2 приведено изменение амплитуды перемещения $A(A_w, A_v)$ в зависимости от частоты внешних нагрузок. Сплошной линией показано изменение амплитуды радиальных перемещений в зависимости от частоты ($\varphi = \pi/2$). Прерывной линией показаны касательные перемещения. Аналогичный результат приведен на рис. 3. Показано изменение амплитуды радиальных перемещений в зависимости от частоты при различных значениях амплитуды ядра релаксации.1-Линия 1 соответствует A=0.01, а вторая линия - A=0.001. Видно, что увеличение любых параметров увеличивает диссипативные процессы механической системы. Видно, что результаты расчетов, полученные по двум гипотезам в низкочастотных диапазонах, дают различие до 20%, а в дальнейшем показывают совпадение.

ЗАКЛЮЧЕНИЯ

На основе анализа численных резултатов установленно: зависимость резонансной амплитуды перемещений оболочки вязких свойств заполнителя составляет 15-25%. Анализ полученных результатов показывает, что исследование колебаний оболочек, содержащих заполнитель, по стержневой теории приводит к достаточно большим ошибочным результатам (до 20%). Применение гипотез Кирхгофа- Лява и Тимошенко в низкочастотных диапазонах даёт отличие до 20%, а в дальнейшем показывает совпадение.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плескачевский, Ю.М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 560 с.

2. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязко упругопластических элементов конструкций.- М.: ФИЗМАТЛИТ. 2005 -576.

3. Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Болтаев З.И. Волновое процессы в механическом волноводе. Основы, концепции, методы. Германия, LAP, Lambert Academic Publishing. 2012-220 p.

4. Леоненко, Д.В. Радиальные собственные колебания упругих трехслойных цилиндрических оболочек / Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2010. — № 3(12). — С. 53–56.

5. Головко, К.Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / К.Г. Головко, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш. - К.: Киевский ун"т, 2012. - 541 с.